Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi

Teorema Limit Pusat

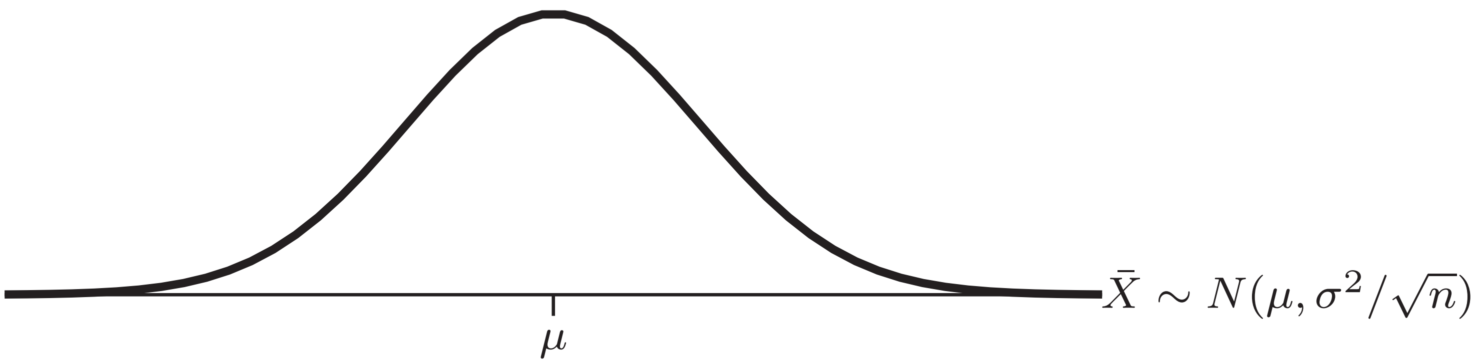
Apabila sampel-sampel random diambil dari suatu populasi yang berdistribusi sembarang, yang mempunyai mean μ dan variansi σ^2, maka untuk n besar, distribusi sampling untuk mean dapat dianggap mendekati Normal dengan $\mu_{\bar{X}} = \mu$ dan variansi $\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$, sehingga

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

mendekati Normal Standar.

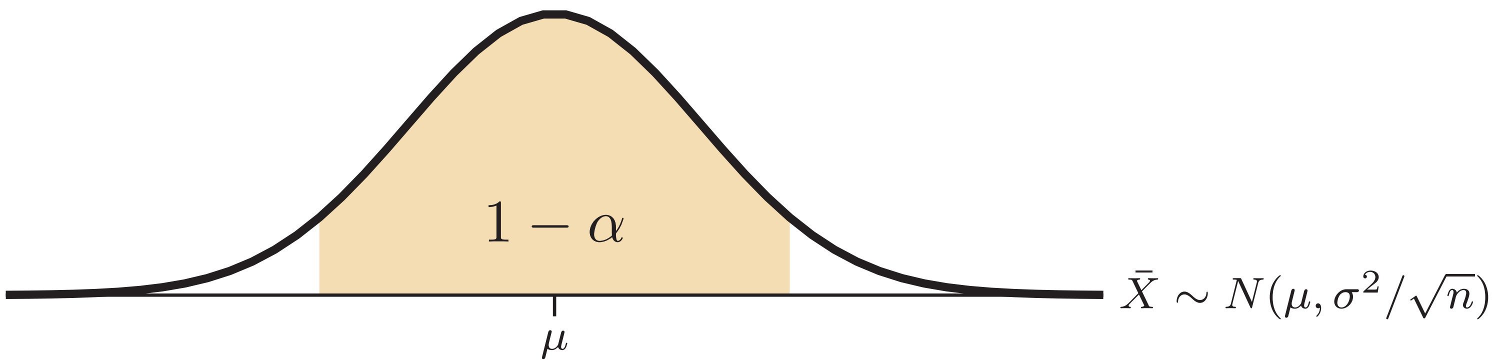
Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



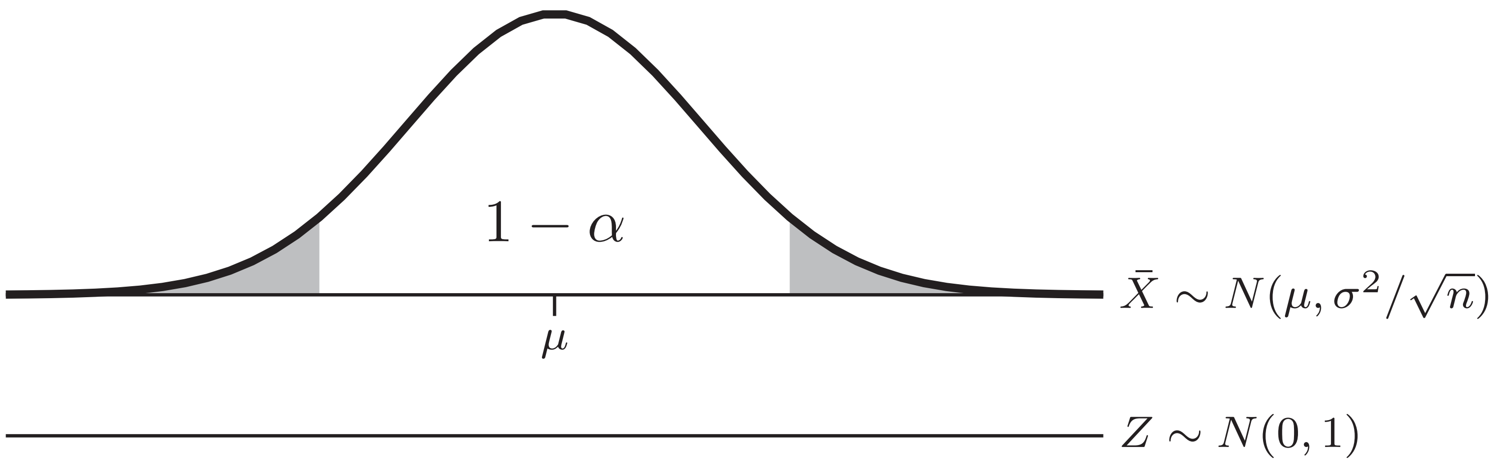
Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



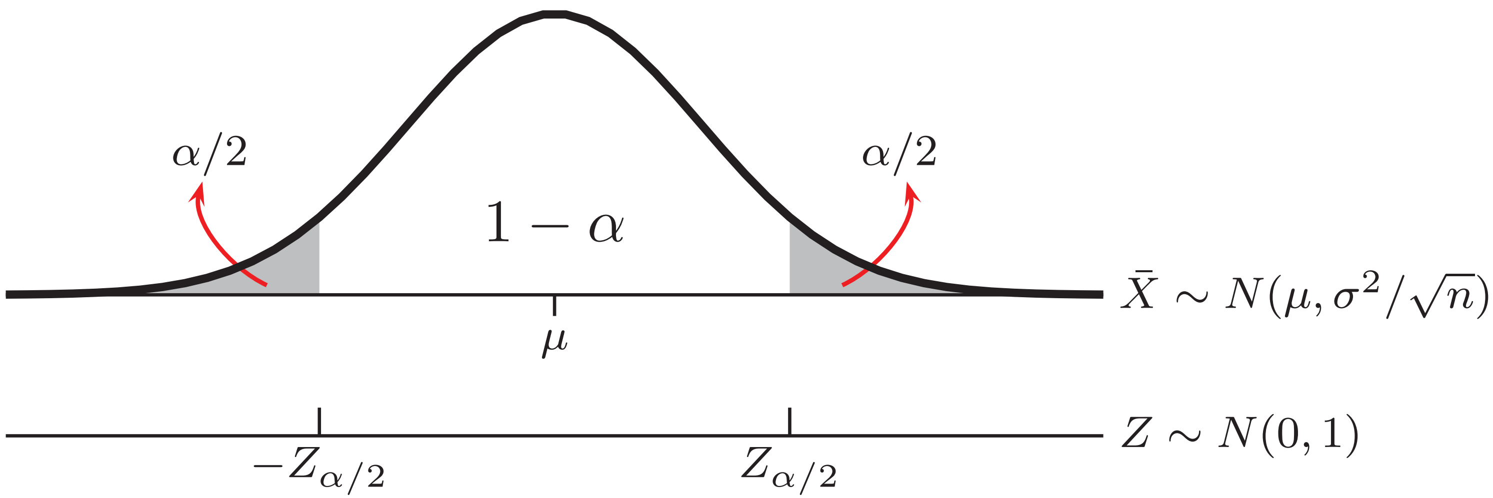
Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

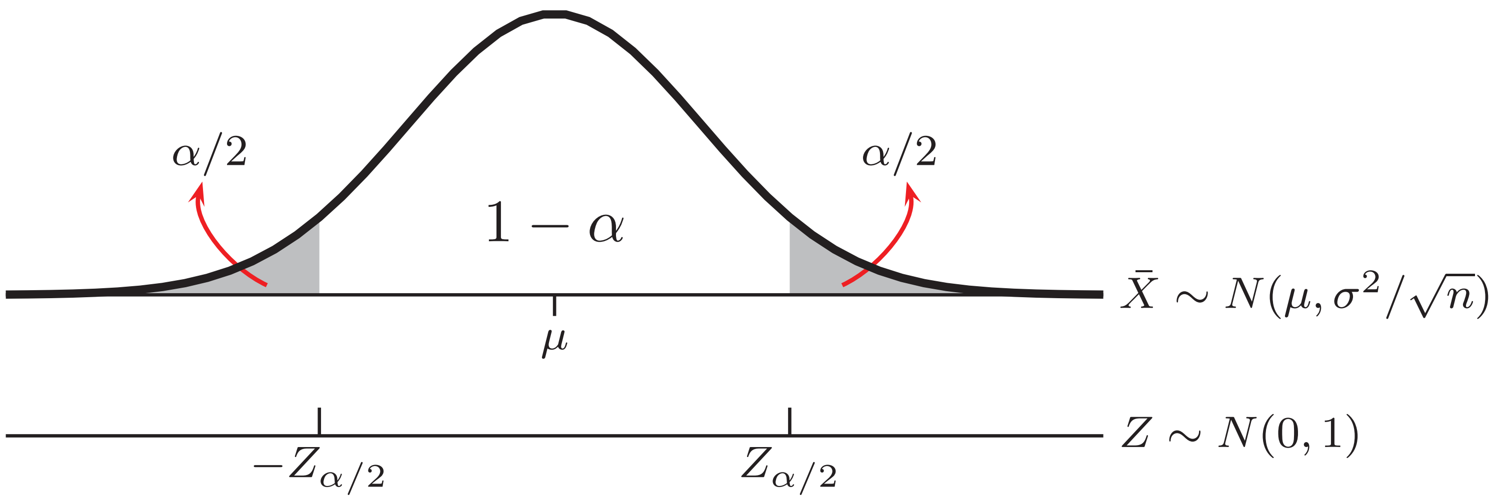
Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



$$P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) \;\; \approx \;\; 1-\alpha$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi

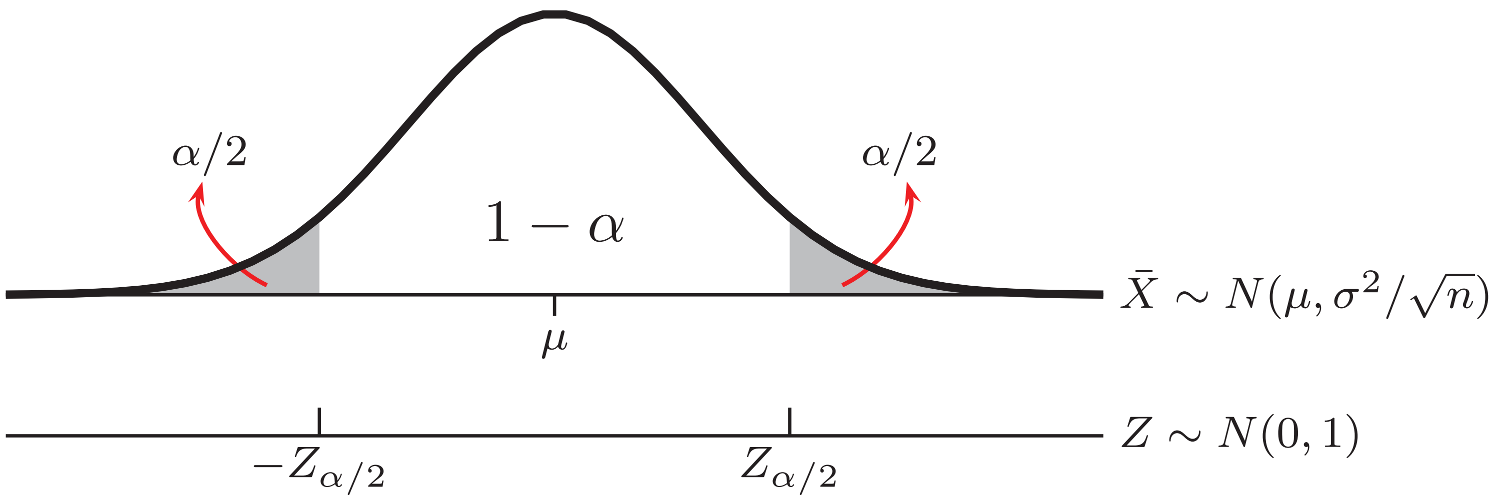


$$P(-Z_{\alpha/2} \le Z \le Z_{\alpha/2}) \quad \approx \quad 1-\alpha$$

$$P(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\alpha/2}) \quad \approx \quad 1-\alpha$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

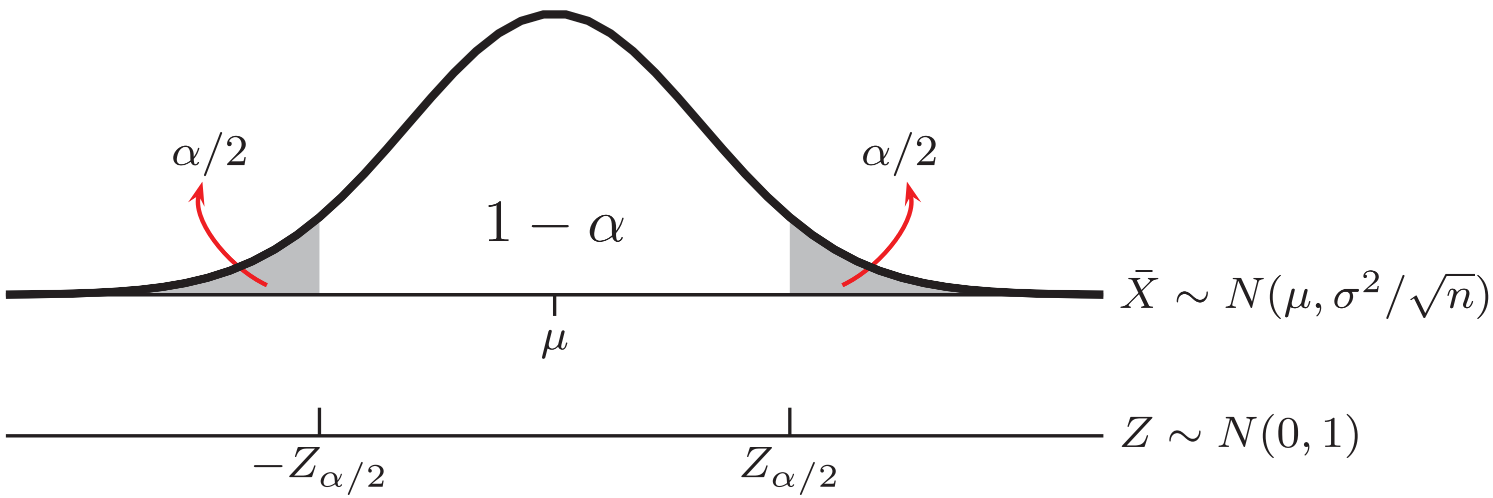
Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



$$
\begin{aligned}
P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) &\approx 1-\alpha \\
P(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}) &\approx 1-\alpha \\
P(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &\approx 1-\alpha
\end{aligned}
$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval mean (μ) suatu populasi



Interval Konfidensi $(1-\alpha)100\%$ untuk mean μ

$B \leq \mu \leq A$

$$B = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$A = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh:
Suatu sampel random dengan 150 keluarga di suatu kota menunjukkan penghasilan bulanan rata-rata Rp 325 000,00 dengan deviasi standar Rp 25 000,00. Hitung interval konfidensi 95% untuk rata-rata penghasilan bulanan seluruh keluarga di kota tersebut.

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh:
Suatu sampel random dengan 150 keluarga di suatu kota menunjukkan penghasilan bulanan rata-rata Rp 325 000,00 dengan deviasi standar Rp 25 000,00. Hitung interval konfidensi 95% untuk rata-rata penghasilan bulanan seluruh keluarga di kota tersebut.

Jawab:
X : penghasilan bulanan di kota tersebut
$\bar{X} = 325.000$; $s = 25.000$; $n = 150$.
Interval konfidensi 95% untuk rata-rata penghasilan bulanan (μ):
$B = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 325.000 - 1{,}96\frac{25}{\sqrt{150}} = 324.996$
$A = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 325.000 + 1{,}96\frac{25}{\sqrt{150}} = 325.004$
Interval konfidensi 95%: $324.996 \leq \mu \leq 325.004$

σ dapat diganti s

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Uji Hipotesis Mean (μ) Populasi

1. Hipotesis
   A. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$
   B. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$
   C. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$
2. Tingkat signifikansi α
3. Statistik Penguji

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

atau

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

jika σ tidak diketahui diganti s. Distribusi dari Z adalah Normal Standar.

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Uji Hipotesis Mean (μ) Populasi

4. Daerah penolakan (berdasarkan α dan Hipotesis)

   A. H_0 ditolak apabila $Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$

   B. H_0 ditolak apabila $Z > Z_{\alpha}$

   C. H_0 ditolak apabila $Z < -Z_{\alpha}$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh:
Ujian standar intelegensia telah diadakan beberapa tahun dengan nilai rata-rata 70 dengan deviasi standar 8. Sekelompok mahasiswa terdiri dari 100 orang mahasiswa, diberi pelajaran dengan mengutamakan bidang Matematika. Apabila dari 100 mahasiswa ini diperoleh hasil ujian dengan nilai rata-rata 75, apakah cukup alasan untuk mempercayai bahwa pengutamaan bidang Matematika menaikkan hasil ujian standar?

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh (Ujian standar intelegensia)
Diketahui X : ujian standar intelegensia, $\bar{X} = 75$, $\mu_0 = 70$, $\sigma = 8$, $n = 100$, μ : mean nilai ujian standar intelegensia:

1. Hipotesis
   $H_0 : \mu \leq 70$
   $H_1 : \mu > 70$
2. Tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}05$
3. Statistik Penguji

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{75 - 70}{8/\sqrt{100}} = 6{,}25$$

4. Daerah kritik: H_0 ditolak apabila $Z > 1{,}64$
5. Kesimpulan: karena $Z = 6{,}25 > 1{,}64$ maka H_0 ditolak, cukup alasan untuk mempercayai bahwa pengutamaan bidang Matematika menaikkan hasil ujian standar (data mendukung ditolaknya H_0)

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval proporsi (p) suatu populasi

Jika $X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$, maka variabel random $\frac{x}{n}$ mempunyai mean p dan variansi $\frac{p(1-p)}{n}$

Untuk n besar

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}}$$

mendekati Normal Standar (Teorema Limit Pusat)

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Estimasi interval proporsi (p) suatu populasi

Interval Konfidensi $(1-\alpha)100\%$ untuk p

$B \leq p \leq A$

$B = \hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$A = \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

dengan $\hat{p} = \frac{x}{n}$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh:

Jika 610 dari 900 sampel random petani di suatu daerah adalah buruh tani, hitunglah interval konfidensi 90% untuk proporsi buruh tani di daerah itu.

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Contoh:
Untuk mengetahui apakah pasangan calon walikota dalam pilkada pada suatu daerah akan memenangkan pemilihan, dilakukan *quick count* oleh lembaga independen pengamat pilkada. Ada dua pasangan calon pada pilkada ini, yaitu pasangan calon A-B yang juga merupakan walikota periode ini dan pasangan calon C-D. Pasangan calon A-B mendapatkan suara 65% pada pemilihan yang lalu. Kandidat dinyatakan menang jika pemilihnya lebih dari 50%. Dari sampel 1200 pemilih dari beberapa TPS, pasangan calon A-B diketahui mendapatkan suara 738.

1. Apakah calon A-B memenangkan pemilihan berdasarkan *quick count* ini?
2. Diduga dukungan masyarakat terhadap calon A-B tidak sekuat sebelumnya, betulkah pendapat ini?

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Uji Hipotesis proporsi (p) Populasi

1. Hipotesis
   A. $H_0 : p = p_0$ vs. $H_1 : p \neq p_0$
   B. $H_0 : p \leq p_0$ vs. $H_1 : p > p_0$
   C. $H_0 : p \geq p_0$ vs. $H_1 : p < p_0$
2. Tingkat signifikansi α
3. Statistik Penguji

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Distribusi dari Z adalah Normal Standar.

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Uji Hipotesis proporsi (p) Populasi

4. Daerah penolakan (berdasarkan α dan Hipotesis)

   A. H_0 ditolak apabila $Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$

   B. H_0 ditolak apabila $Z > Z_{\alpha}$

   C. H_0 ditolak apabila $Z < -Z_{\alpha}$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Hubungan antara Interval Konfidensi dan Uji Hipotesis

Interval Konfidensi $(1-\alpha)100\%$ untuk mean μ

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Daerah penolakan dengan tingkat signifikansi α untuk uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$Z > Z_{\alpha/2} \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2}$$

Daerah penerimaan

$$-Z_{\alpha/2} \le Z \le Z_{\alpha/2}$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Hubungan antara Interval Konfidensi dan Uji Hipotesis

Interval Konfidensi $(1-\alpha)100\%$ untuk mean μ

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Daerah penolakan dengan tingkat signifikansi α untuk uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$Z > Z_{\alpha/2} \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2}$$

Daerah penerimaan

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}$$

Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Hubungan antara Interval Konfidensi dan Uji Hipotesis

Interval Konfidensi $(1-\alpha)100\%$ untuk mean μ

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

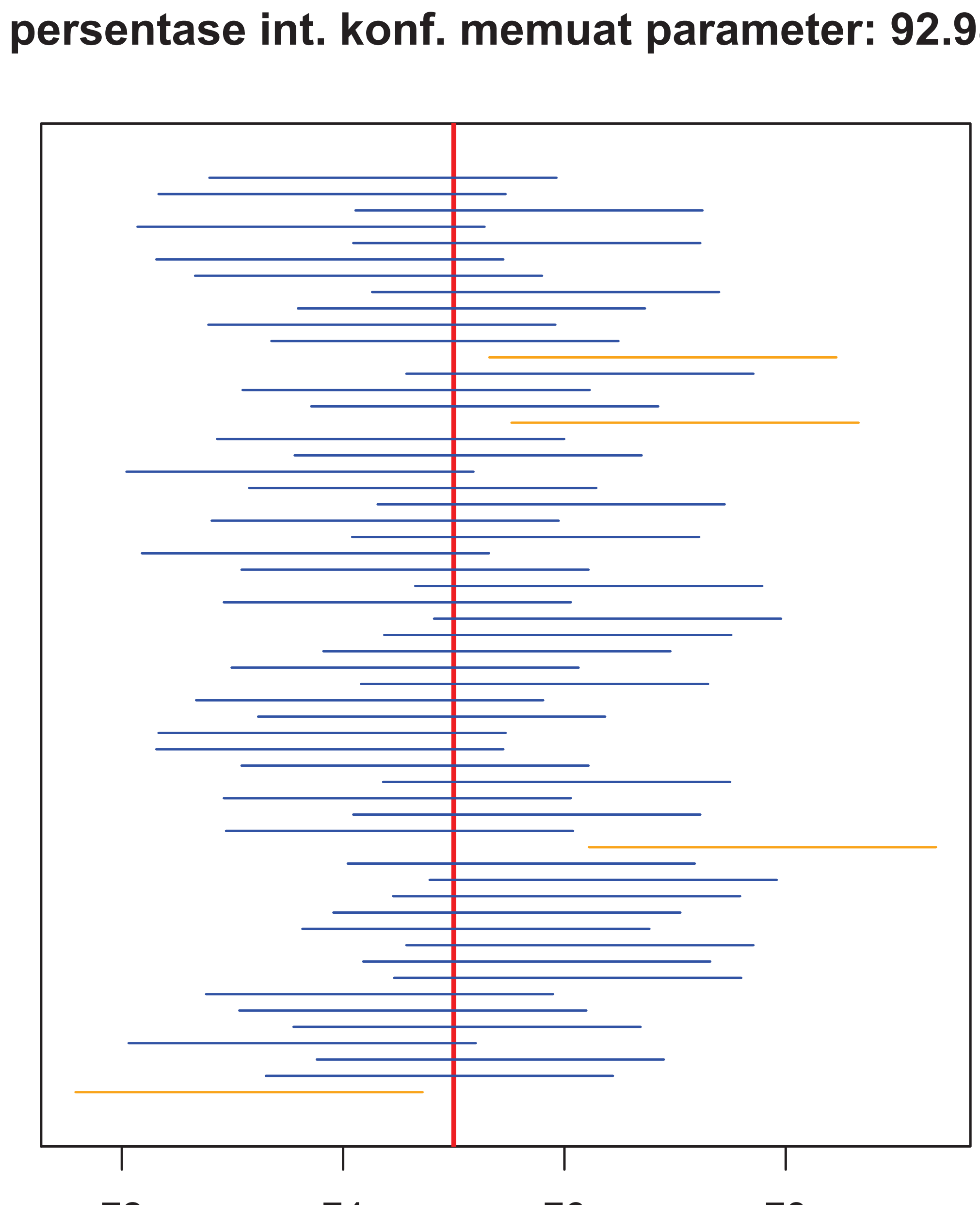
Daerah penolakan dengan tingkat signifikansi α untuk uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$Z > Z_{\alpha/2} \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2}$$

Daerah penerimaan

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Interval konfidensi



Inferensi Statistik Satu Populasi Sembarang

Ringkasan

Parameter	Statistik	Interval Konfidensi (1-α)100%	Hipotesis alternatif	Daerah Kritik
μ mean	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ $Z \sim N(0,1)$	$B \leq \mu \leq A$ $B = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $A = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$ $Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$
p proporsi	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ $Z \sim N(0,1)$	$B \leq p \leq A$ $B = \hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ $A = \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$H_1 : p \neq p_0$ $H_1 : p > p_0$ $H_1 : p < p_0$	$Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$ $Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

- Data dianggap berdistribusi Normal
- Ukuran sampel tidak harus besar
- Jenis parameter:
  - mean μ
  - variansi σ^2
- Distribusi Sampling
  - Normal
  - t
  - Chi-kuadrat (*Chi-square*)

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Normal Standar

Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel random berasal dari populasi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka variabel random

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

berdistribusi Normal Standar $N(0, 1)$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Distribusi t

Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel random berasal dari populasi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka variabel random

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

berdistribusi t dengan derajad bebas $n - 1$.
Untuk n yang semakin besar, distribusi t akan mendekati distribusi Normal.

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Distribusi Chi-kuadrat $2k$

Diketahui $X_1, \ldots, X_k$ adalah variabel random yang berdistribusi Normal yang independen satu dengan yang lain. Distribusi variabel random

$$\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_k^2$$

berdistribusi Chi-kuadrat berderajad bebas k dengan mean $\mathrm{E}(\chi^2) = k$ dan variansi $\mathrm{Var}(\chi^2) = 2k$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

<u>Distribusi Chi-kuadrat $n-1$</u>
Diketahui $X_1, \ldots, X_n$ adalah variabel random yang berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka variabel random

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajad bebas $n-1$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Distribusi Normal Standar

Apabila sampel random berukuran n diambil dari suatu populasi yang berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2, maka variabel random

$$Z = \frac{s^2 - \sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$$

berdistribusi $N(0, 1)$ untuk n besar.

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Parameter	Statistik	Interval Konfidensi (1-α)100%	Hipotesis alternatif	Daerah Kritik
μ mean	Bila σ^2 diketahui $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$ $Z \sim N(0,1)$	$B \leq \mu \leq A$ $B = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $A = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$ $Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$
	Bila σ^2 tidak diketahui $$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$ $t \sim$ distribusi t dgn. derajad bebas $n-1$	$B \leq \mu \leq A$ $B = \bar{X} - t_{(n-1,\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}$ $A = \bar{X} + t_{(n-1,\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$t > t_{(n-1,\alpha/2)}$ atau $t < -t_{(n-1,\alpha/2)}$ $t > t_{(n-1,\alpha)}$ $t < -t_{(n-1,\alpha)}$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Parameter	Statistik	Interval Konfidensi (1-α)100%	Hipotesis alternatif	Daerah Kritik
σ^2 variansi	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ $\chi^2 \sim$ chi-square dgn. derajad bebas $k = n-1$	$B \le \sigma^2 \le A$ $B = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}$ $A = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{(k,\alpha/2)}$ atau $\chi^2 < \chi^2_{(k,1-\alpha/2)}$ $\chi^2 > \chi^2_{(k,\alpha)}$ $\chi^2 < \chi^2_{(k,1-\alpha)}$
	Untuk n besar, $Z = \frac{s^2 - \sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$ $Z \sim N(0,1)$	$B \le \sigma^2 \le A$ $B = \frac{s^2}{1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}}$ $A = \frac{s^2}{1-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}}$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$ $Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Contoh:
Dari sampel dengan 25 kasus, diperoleh dosis obat yang sesuai untuk mendapatkan respon yang diinginkan dari pasien sebagai berikut:

```
1,07 0,79 0,83 1,14 1,22 1,09 1,17 1,10 1,26
1,10 1,04 1,17 0,94 0,86 1,19 1,01 1,12 0,83
1,02 1,20 0,85 1,03 0,95 1,13 0,98
```

Dengan asumsi data berdistribusi Normal, hitung interval konfidensi 95% untuk rata-rata dosis μ. Menggunakan interval ini, ujilah (dua sisi, $\alpha = 5\%$) bahwa rata-rata dosis adalah 1,00.

Inferensi Statistik Satu Populasi Normal

Contoh:
Suatu mesin pembuat uang dikatakan masih baik jika mampu memproduksi uang logam dengan standar deviasi berat kurang dari 0,035 gram. Sampel random berukuran 20 uang logam mempunyai deviasi standar 0,030 gram.

1. Ujilah apakah mesin tersebut masih baik dengan mengasumsikan bahwa berat uang logam berdistribusi Normal ($\alpha = 0,05$)
2. Statistik penguji apa yang digunakan jika $n = 64$? Jelaskan!